

城市交通的若干数学问题

简介

基本思想：考察上海交通中的交通流模型。这个问题已有非常成熟的模型。我们主要需求是：

(a) 网络的优化设计。这是一个非常大的问题，集中了许多专家学者，有许多有趣的、值得研究的问题。

(b) 发展子模型，将它们合并成大型网络模型。尤其是，我们需要一些好的模型，用以解决交通阻塞、多方向的分流和交通路障等问题。

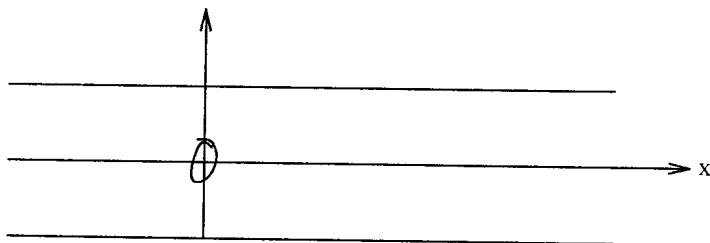
我们的模型集中考虑自行车在“有问题”的路上行驶的问题。我们研究：

(a) 自行车流从交通信号灯沿直道行驶。

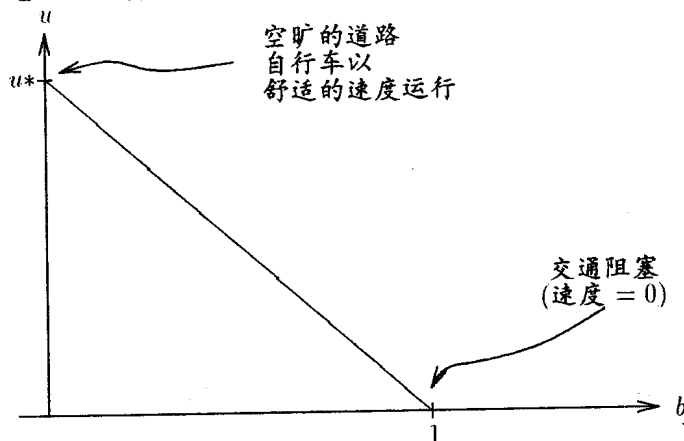
(b) 自行车流在交通信号灯处向右转弯。

我们的主要目标是掌握交通阻塞的动力学行为。

(a) 直道情形：



设 b 为道路上自行车的密度, u 为自行车的速度.
 若车流密度是连续的 (连续模型), 则速度 u 依赖于密度 b .
 记 $b = 1$ 为交通阻塞时的最大密度

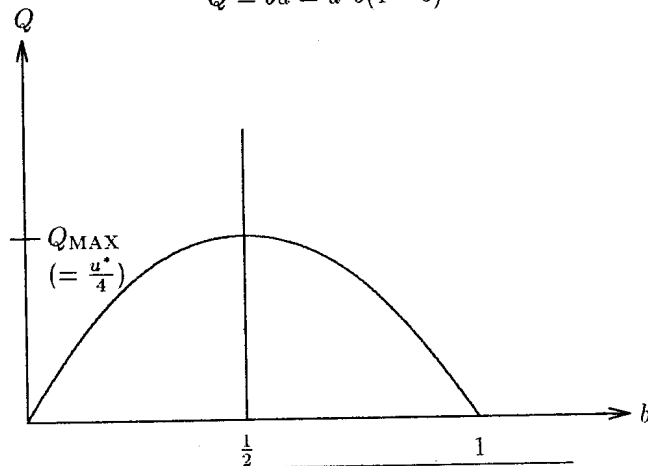


取 (例如)

$$u = u^*(1 - b)$$

则车流量为

$$Q = bu = u^*b(1 - b)$$



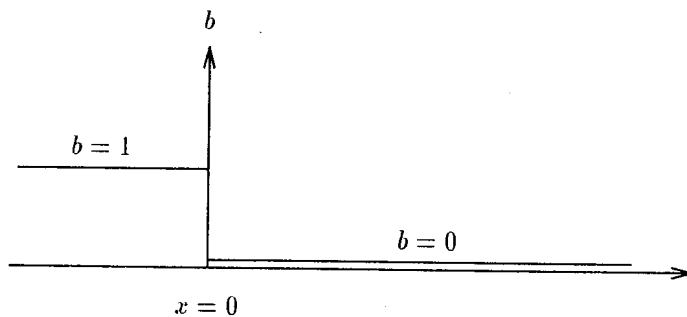
由自行车守恒可得

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

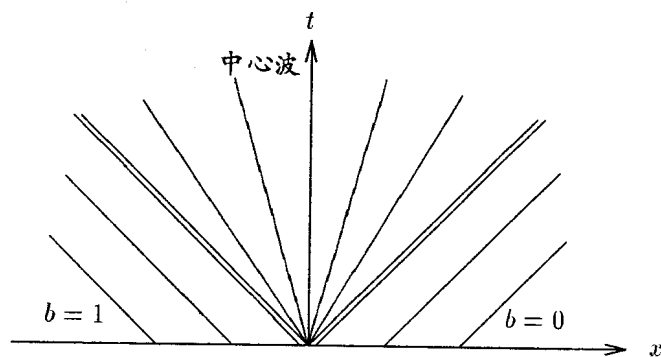
即

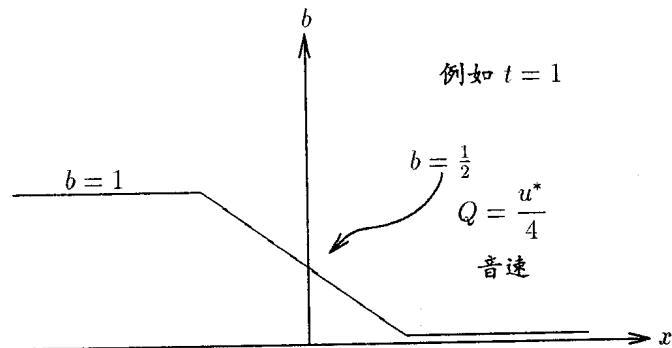
$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^* b(1-b)) = 0$$

考虑交通信号灯处的交通情况



当信号灯转为绿灯时

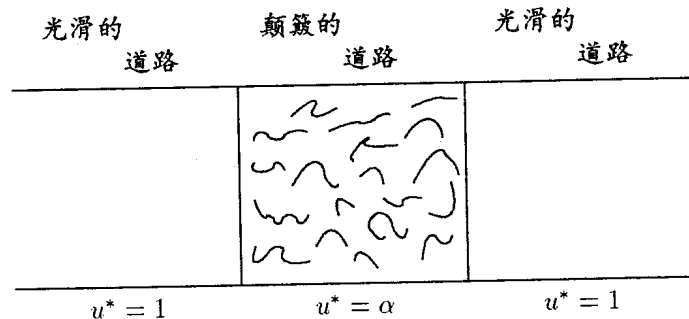




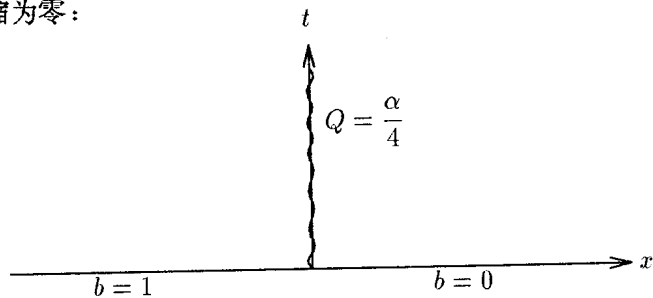
沿特征展开为扇形.

在 $x=0$ 处, $b=1/2$, $Q=u^*/4$ (音速) — 最大流量.

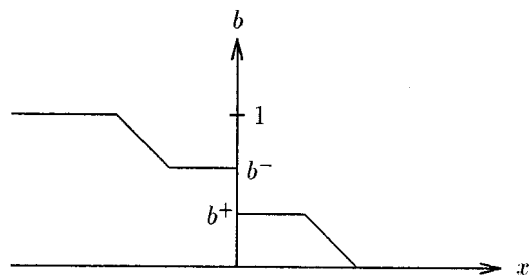
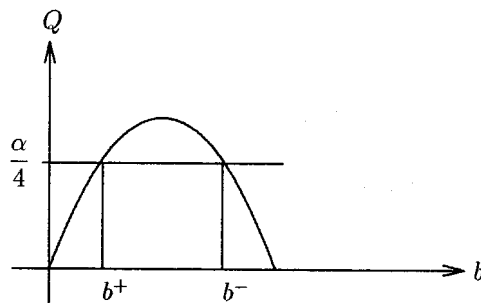
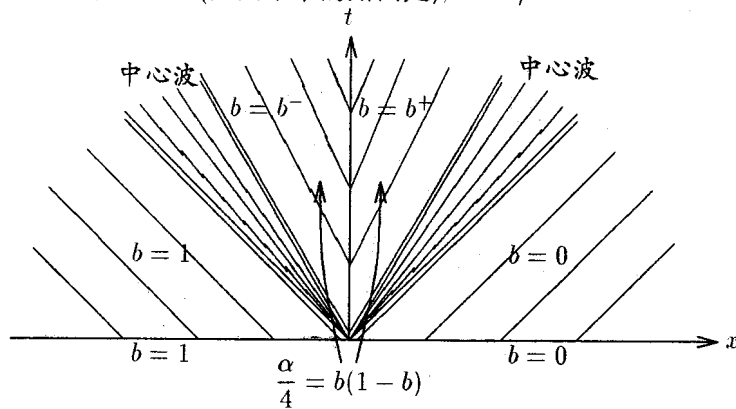
当 $u^*=u^*(x)$, 出现了更为有趣的现象. 例如



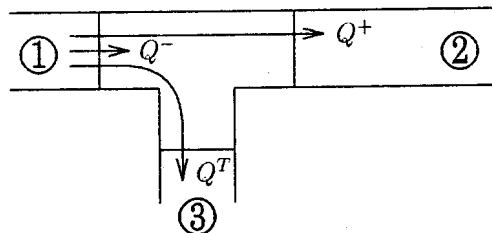
此时, 在 $u^*=\alpha$ 区域中, 最大车流量达到最小值. 将这一区域收缩为零:



注：在 $x = 0$ (凹凸不平的路面处), $b = 1/2$.



(b) 转弯情形:



设有 λ 比例的人想右转弯. 在区域 1,2,3 中运用同一个偏微分方程.

在直道与转弯的连接点处:

(1) 自行车守恒:

$$Q^- = Q^+ + Q^T$$

(2) 设有 λ 比例的人转弯:

$$Q^+ = (1 - \lambda)Q^-$$

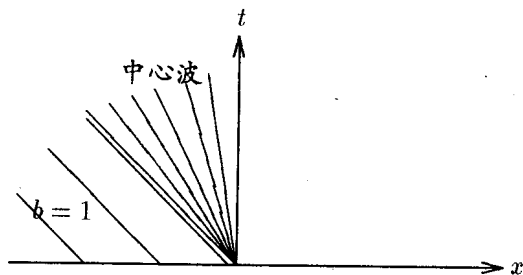
$$Q^T = \lambda Q^-$$

(3) 对转弯的自行车存在一个最大流量 (小于允许的直行车流量)

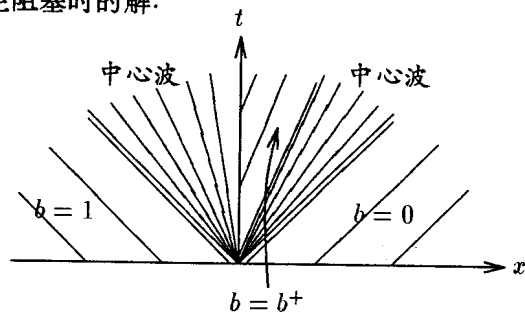
$$Q^T \leq \frac{\alpha}{4}$$

情形 (1): $Q^T < \frac{\alpha}{4}$

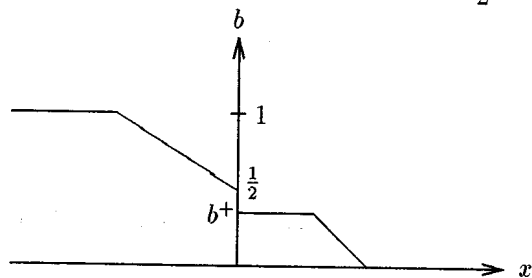
此时区域 1 不受 Q^T 的影响.



于是 $Q^- = 1/4$, 并且由条件 $Q^T = \lambda/4$ 可得, 这是在 $\lambda < \alpha$, 直行车流发生阻塞时的解.

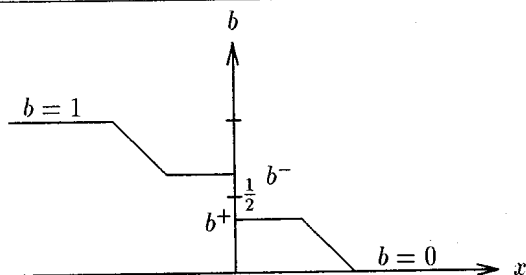


$$b^+(1 - b^+) = Q^+ = 1 - \lambda \quad (b^+ < \frac{1}{2})$$



情形 (2): $Q^T = \frac{\alpha}{4}$

此时转弯车流发生阻塞.



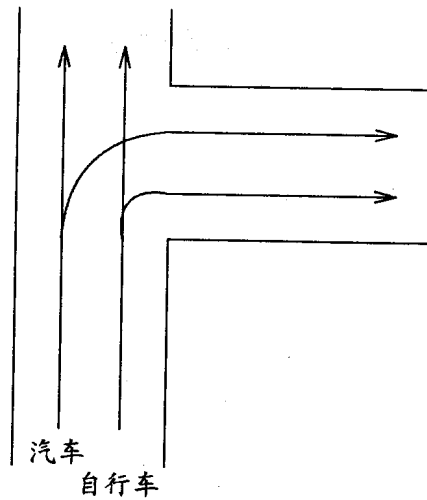
总 结

在截面上的车流依赖于

- (a) 每个方向上可通过的最大流量 (即 $\frac{\alpha}{4}$ 或 $\frac{1}{4}$)
- (b) 有多少自行车想转弯 (即 λ)

可能的推广

- (1) 修改连接模型, 考虑转弯与自行车流之间的相互作用: 包括路面宽度等.
- (2) 考虑当信号灯为红灯时会发生什么情况. 此时一定会有激波出现.
- (3) 二相问题: 允许自行车和汽车同时存在.



对二相问题, 阻塞可以发生在 4 种情形:

- 直行的汽车
- 汽车试图穿越自行车流
- 直行的自行车试图穿过转弯的汽车
- 自行车转弯

注: 当转弯汽车与直行自行车相遇时, 两者会发生强相互作用.

- 需要数据
- 确定流量函数 (视为密度的函数)
- 需要进行数值模拟

(C.Please、蔡志杰整理)